

Logarithmusfunktionen

Nur Kurvendiskussionen
für die wichtigsten LN-Funktionstypen

Lösungen ohne CAS und GTR

Alle Methoden ganz ausführlich

Datei Nr. 43106

Stand 6. Oktober 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Dieser Text beschert dem Leser viel Übungsmaterial zu den Grundlagen der Logarithmusfunktionen.

Es geht NUR um Kurvendiskussionen. Gefragt sind also:

Definitionsbereich, Verhalten am Rand, Schnittpunkte mit der x-Achse,

Asymptoten, mindestens 2 Ableitungen, Extrem- und Wendepunkte.

Einige Funktionen sind mit einem zusätzlichen Parameter gegeben, also als

Funktionenscharen. Da bietet sich dann eine Ortskurvenaufgabe als Zusatz an.

Die Aufgabenstellungen werden wie folgt abgekürzt:

D = Definitionsbereich

R = Verhalten am Rand

S = Symmetrieverhalten

N = Nullstellen, Schnittpunkte mit der x-Achse

Sy = Schnittpunkt mit der y-Achse

As = Asymptoten

A = Ableitungen

E = Extrempunkte

W = Wendepunkte

M = Wertmenge.

Wer umfangreiche Aufgaben sucht, also Aufgaben mit vielen Zusatzaufgaben, meist im Abiturstil, lese bitte im **Text 46110** nach.

Hier eine kleine Zusammenstellung des Grundwissens für e und ln:

(1) $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$

Beispiel: $e^0 = \ln 0 = 1$

(2) $n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$

Beispiel: $2 \cdot \ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 4 = \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \ln \sqrt{4} = \ln 2$$

(3) $e^{\ln a} = a$

Beispiel: $e^{2 \cdot \ln 3} = e^{\ln 9} = 9$

$$e^{\frac{1}{2} \cdot \ln 4} = e^{\ln 2} = 2$$

(4) $\ln(e^a) = a \cdot \ln(e) = a \cdot 1 = a$ Umkehrung von (2):

Beispiel: $\ln e = 1$

$$\ln(e^2) = 2 \cdot \ln(e) = 2 \cdot 1 = 2$$

(5) $\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v$

1. Logarithmusregel

Beispiel: $\ln(2e) = \ln 2 + \ln e = \ln 2 + 1$

(6) $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$

2. Logarithmusregel

Beispiel: $\ln \frac{e}{2} = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$

Die Aufgabenstellungen

Nr.	Funktionsterm	Aufgaben	Lösung
-----	---------------	----------	--------

1. LN-Funktionen mit linearem Argument

11	$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$	D R N M As A E W M	5
12	$f(x) = \ln(2 - x)$	D R N M As A E W M	5
13	$f(x) = \ln(4x + 4)$	D R M N As A E W M	6
14	$f(x) = \ln\left(4 - \frac{1}{2}x\right)$	D R M N As A E W M	6
15	$f_t(x) = \ln\left(\frac{1}{t}x - t\right)$	D R M N As A E W M	7
16	$f(x) = 2 - \ln(2x + 1)$	D R M N As A E W M	7
17	$f(x) = 4 - \ln(4x)$	D R M N As A E W M	8
18	$f(x) = \ln \frac{1}{x+1} = -\ln(x+1)$	D R M N As A E W M	8

2. LN-Funktionen mit quadratischem Argument

21	$f(x) = \ln(x^2 - 4)$	D R M N As A E W M	9
22	$f(x) = \ln(4x - x^2)$	D R M As N A E W M / S zu $x = 2$	10
23	$f(x) = \ln(x^2)$	D R M N As A E W	11
24	$f(x) = \ln\left[(x+1)^2\right]$	D R M N As A E W / S zu $x = 1$	11
25	$f(x) = \ln\left(8 - \frac{1}{2}x^2\right)$	D R M N As A E W	12
26	$f(x) = \ln(x^2 + 4)$	D R M N As A E W	12
27	$f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$	D R M N As A E W / S zu $x = 0,5$	13

3. Direkte LN-Funktionen mit Bruch-Argument

31	$f(x) = \ln \frac{4-x}{x} = \ln\left(\frac{4}{x} - 1\right)$	D R M As N A E W / S zu W	14
32	$f(x) = \ln \frac{x-1}{x+2}$	D R M As N A E W / S zu $Z(-\frac{1}{2} 0)$	15
33	$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$	D R M As N A E W / S zu $Z(0 0)$	16
34	$f(x) = \ln \frac{x+2}{8-x}$	D R M As N A E W / S zu W	17
35	$f(x) = \ln \frac{x^2 - 16}{x}$	D R M As N A E W	18

4. Ln-Funktion in einer Summe

41	$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$	D R M As A E W	19
42	$f(x) = \ln(tx) - \frac{1}{2t}x^2$	D R As A E W / Anz. der Nullstellen	20
43	$f(x) = x + \ln(x^2)$	D R As A E W	21
44	$f_a(x) = a \cdot x - \ln(x)$	D R As A E W / Anz. der Nullstellen	22
45	$f_t(x) = t \cdot \ln x + \frac{t-1}{x}$	D R As A E W / E in Abh. von t	23

5. Ln-Funktion in einem Produkt

51	$f(x) = x \cdot \ln x$	D R M As A E W	24
52	$f(x) = (x+2) \cdot \ln(x+2)$	D N R A E W / senkr. Tangente	25
53	$f(x) = x \cdot \ln(4-x)$	D As N A W	26
54	$f_t(x) = x \cdot \ln(x) - tx$	D As A E W / senkr. Tangente	27
55	$f_t(x) = x^2 \cdot \ln(tx)$	D R A E W	28
56	$f(x) = (x^2 - 4) \cdot \ln(\frac{1}{4}x^2)$	D R S N A E / Zusammengesetzte Funktion	29

6. Ln-Funktion in einem Bruch

61	$f_t(x) = 2 \frac{\ln x - t}{x}$	D R As N A E W / Ortskurve der H	30
62	$f_a(x) = \frac{\ln(ax)}{x^2}$	R As A N E W / Ortskurve der H	31
63	$f_t(x) = \frac{t}{x^2} \cdot \ln \frac{x^2}{t}$	N S As A E W	32
64	$f_a(x) = 3 \frac{2a - \ln(x^2)}{x}$	S As A E W	34

7. Ln-Funktion mit Wurzeln

71	$f(x) = \sqrt{\ln x}$	D N As A E W / Randtiefp. m. senkr. Tang.	35
72	$f_t(x) = \frac{\ln x - t}{\sqrt{x}}$	R As N A E W	36
73	$f_a(x) = 4 \cdot \sqrt{a - \ln x}$	D As N A E W	37

8. Andere Ln-Funktionen

81	$f(x) = [\ln x]^2$	D R As N A E W	38
82	$f_t(x) = t \cdot [\ln(x+t)]^2$	D R As N A E W	39
83	$f(x) = 1 - [\ln(1-x)]^2$	D R N Sy A E W	40

Lösung 11

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

Definitionsbereich: Bed.: $\text{Arg} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \quad \mathbf{D} =]2; \infty[$

Randwerte: $x \rightarrow 2 \Rightarrow \text{Arg} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Arg} \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$

Wertmenge: $\mathbf{W} = \mathbb{R}$

Senkrechte Asymptote: $x = 2$

Nullstellen: Bed.: $\text{Arg} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 = 1 \Leftrightarrow x_N = 4$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(4 | 0)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x - 1} = \frac{1}{x - 2} = (x - 2)^{-1}$

$$f''(x) = -(x - 2)^{-2} = -\frac{1}{(x - 2)^2}$$

Extrempunkte gibt es keine, denn da für alle $x \in \mathbf{D} \quad f'(x) > 0$, wächst f streng monoton.

Wendepunkte gibt es keine, denn da für alle $x \in \mathbf{D} \quad f''(x) < 0$, hat K stets Rechtskrümmung.

Lösung 12

$$f(x) = \ln(2 - x)$$

Definitionsbereich: Bed.: $\text{Arg} > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2 \quad \mathbf{D} =]-\infty; 2[$

Randwerte: $x \rightarrow 2 \Rightarrow \text{Arg} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \text{Arg} \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$

Wertmenge: $\mathbf{W} = \mathbb{R}$

Senkrechte Asymptote: $x = 2$

Nullstellen: Bed.: $\text{Arg} = 1 \Leftrightarrow 2 - x = 1 \Leftrightarrow x_N = 1$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $N(1 | 0)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{-1}{2 - x} = \frac{1}{x - 2} = (x - 2)^{-1}$

$$f''(x) = -(x - 2)^{-2} = -\frac{1}{(x - 2)^2}$$

Extrempunkte gibt es keine, denn da für alle $x \in \mathbf{D} \quad f'(x) < 0$, fällt f streng monoton.

Wendepunkte gibt es keine, denn da für alle $x \in \mathbf{D} \quad f''(x) < 0$, hat K stets Rechtskrümmung.

